Jurnal Ilmiah Edukasi Matematika (JIEM)
Vol. 1/No.2/Oktober 2015
ISSN: 977-2442-878-028

DIAMETER DAN DIMENSI PARTISI PADA GRAF CATERPILLARS

Margaretha Dwi Cahyani
Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

Suppose $G = (V, E)$ *is connected graph and* $u, v \in V$ *are any two points in* G. *Diameter G is defined as the maximum distance between two points in* G, *denoted by* $diam\,(G) = max\,\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$. *Diameter of Caterpillars Graph*$\left(C_{n,m}\right)$ *is* $diam\left(C_{n,m}\right) = n + 1$. *Suppose there is a point* v *in* G. *Then the representation* v *to* Π *is defined as* $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2) \dots, d(v, S_k))$. *If any different point in* G *has a different representation of the* Π, *then* Π *is called the resolving partition. The minimum cardinality of k-resolving partition against* $V(G)$ *referred to the partition dimension of* G, *denoted by* $pd(G)$. *Partition dimension of graph Caterpillars* $(C_{n,m})$ *is* $pd\left(C_{n,m}\right) = n.m + 1$

Key Words: *Caterpillars Graph, Diameter Graph, Partition Dimension, Resolving Partition.*

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V$ adalah dua titik (simpul) sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua simpul di G, dinotasikan dengan $diam\,(G) = max\,\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$. Diameter dari Graf *Caterpillars* adalah $diam\left(C_{n,m}\right) = n + 1$. Misalkan terdapat suatu titik (simpul) v di G. Maka representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2) \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dengan dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Dimensi partisi dari graf *Caterpillars* $(C_{n,m})$ adalah $pd\left(C_{n,m}\right) = n.m + 1$.

Kata Kunci: Diameter Graf, Dimensi Partisi, Graf Caterpillars, Partisi Pembeda.

A. Pendahuluan

1. Latar Belakang

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V$ adalah dua titik (simpul) sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua simpul di G, dinotasikan dengan $diam\,(G) = \max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$. Misal ambil sebarang simpul $v \in V$. Jarak $d(u,v)$ antara simpul u dan v pada graf G adalah panjang maksimum lintasan terpendek dari dua simpul tersebut. Sedangkan jarak terpanjang antara simpul-simpul pada $V(G)$ didefinisikan sebagai diameter dari graf G ditulis $diam(G)$. Misal terdapat simpul $v \in V(G)$ dan S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ jarak antara v dan S adalah

$$d(v,S) = min\,\{d(v,x)|x \in S\}$$

Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan $S_1, S_{2,}, \dots, S_k$ yang saling lepas. Didefinisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan berisikan k-partisi tersebut. Misalkan terdapat simpul $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. Jika simpul-simpul yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda graf G. Kardinalitas dan partisi pembeda minimum disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$.

Graf *Caterpillars* adalah salah satu graf pohon , dilambangkan dengan $C_{n,m}$. Graf *Caterpillars* memiliki lintasan batang (*backbone*) dan cabang (*dependent*), dengan setiap *dependent* graf terhubung pada G[4]. Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki sikel. Karena Graf *Caterpillars* ($C_{n,m}$) adalah suatu graf pohon maka Graf *Caterpillars* merupakan suatu graf yang terhubung (*connected graph*) sehingga dapat dicari diameter dan dimensi partisi dari graf tersebut.

2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam penulisan ini adalah:

a. Bagaimanakah Diameter pada Graf *Caterpillars*?

b. Bagaimanakah Dimensi Partisi pada Graf *Caterpillars*?

Vol. 1/No.2/Oktober 2015
ISSN: 977-2442-878-028

3. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah:

a. Merumuskan Diameter pada Graf *Caterpillars*

b. Merumuskan Dimensi Partisi pada Graf *Caterpillars*

B. Tinjauan Pustaka

1. Diameter Graf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V$ adalah dua titik (simpul) sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua simpul di G, dinotasikan dengan $diam\ (G) = \max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$ (Gross, 2006).

2. Graf *Caterpillars*

Graf *Caterpillars* adalah salah satu graf pohon, dilambangkan dengan $C_{n,m}$. Graf *Caterpillars* memiliki lintasan batang (*backbone*) dan cabang (*dependent*), dengan setiap *dependent* graf terhubung pada G (Schmuck, 2012). Misal ambil sebarang simpul $v \in V$. Jarak $d(u,v)$ antara simpul u dan v pada graf G adalah panjang maksimum lintasan terpendek dari dua simpul tersebut (Riza, 2012). Sedangkan jarak terpanjang antara simpul-simpul pada $V(G)$ didefinisikan sebagai diameter dari graf G ditulis $diam(G)$. Misal terdapat simpul $v \in V(G)$ dan S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ jarak antara v dan S adalah

$$d(v,S) = min\ \{d(v,x)|x \in S\}$$

Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan $S_1, S_{2,}, \dots, S_k$ yang saling lepas. Didefinisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan berisikan k-partisi tersebut. Misalkan terdapat simpul $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. Jika simpul-simpul yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda graf G. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$(Chartrand, 2000).

Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak mempunyai subgraf isomorfik dengan sikel. Graf pohon ditulis dengan T. Suatu graf dapat disebut sebagai pohon jika (Gross, 2006) :

a) T adalah pohon
b) T tidak mempunyai sikel dan mempunyai $(n-1)$ sisi
c) T terhubung dan mempunyai $(n-1)$ sisi
d) T terhubung dan setiap sisi adalah *cut edge*
e) Sebarang dua simpul terhubung oleh tepat satu path/lintasan
f) T tidak mempunyai sikel.

Graf *Caterpillars* adalah graf pohon yang mempunyai banyak cabang (*dependent)*, setiap *dependent* memiliki jumlah *edge* dan simpul yang sama (Tomescu, 2008). Graf *Caterpillars* dilambangkan dengan $C_{n,m}$ dengan n adalah banyaknya simpul *backbone* pada graf tersebut dan m adalah banyaknya simpul *dependent* (terdiri dari simpul dan *edge)* pada masing-masing cabang(Tomescu, 2008). Pada jurnal ilmiah ini penulis akan menyajikan diameter dan dimensi partisi dari suatu graf *Caterpillars*.

C. Pembahasan

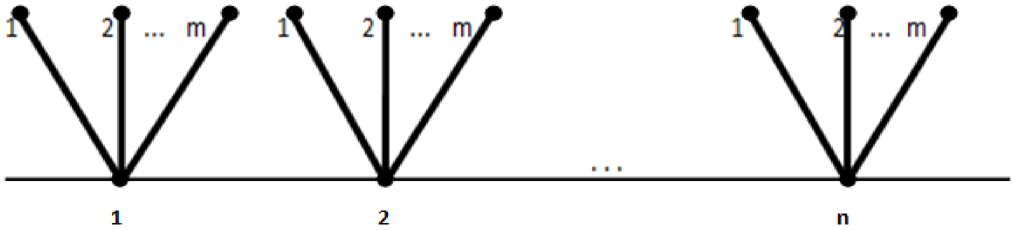
1. Diameter Graf *Caterpillars* $C_{n,m}$

Teorema 1.

Diberikan Graf *Caterpillars* $C_{n,m}$, n adalah order dari *path* (banyaknya simpul *backbone* dari graf *Caterpillars*), m adalah order dari cabang (banyaknya simpul *dependent*), maka $diam(C_{n,m}) = n+1$.

Bukti:

Misal $C_{n,m}$ adalah suatu graf *Caterpillars* dan $V(n,m)$ adalah himpunan simpul.



Gambar 1. Graf $C_{n,m}$

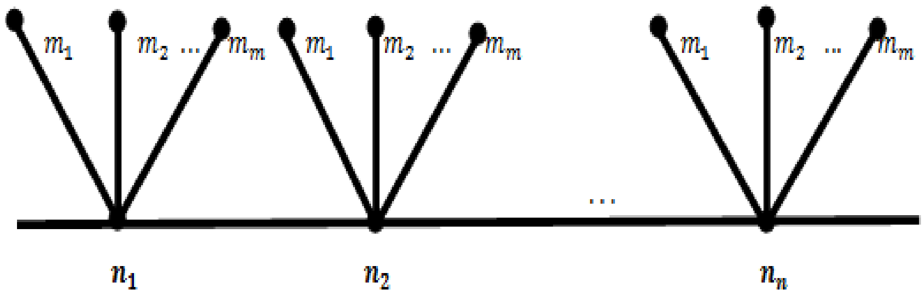
Berdasarkan:

Definisi 1.1

V adalah subset G. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan misalkan S subset V. Misalkan terdapat suatu simpul $v \in V$. Maka jarak simpul v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{(v, x)|x \in S\}$ (Riza, 2012).

Definisi 1.2

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V$ adalah dua simpul sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua simpul di G dinotasikan $diam(G) = \max\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$, sehingga $diam\ (G) = diam\ C_{n,m} = max\{d(u, v)|u, v \in V\}$(Riza, 2012).



Gambar 2. Graf $C_{n,m}$

Order pada *backbone* adalah n, order pada simpul *dependent* adalah m, dimana lintasan/*path* merupakan subset dari $C_{n,m}$. Maka :

$d(m_1, n_1) = 1$

$d(n_1, n_1) = 0$

$d(m_1, m_2) = 2$

$d(n_{1,}m_2) = 1$

$d(n_1, n_2) = 2$

$\vdots$

$d(n_1, n_n) = n - 1$

$d(m_1, m_m) = d(m_1, n_1) + d(n_1, n_n) + d(n_n, m_m)$

$= 1 + (n - 1) + 1$

$= n + 1$

Karena berdasarkan definisi diameter suatu graf G

$$diam(G) = \max\{d(u,v) | u, v \in V(C_{n,m})\}$$

Dengan V subset dari $C_{n,m}$,

maka $diam(C_{n,m}) = \max\{d(n,m)|n, m \in V(C_{n,m})\}$

$= n + 1$

Jadi terbukti $diam(C_{n,m}) = n + 1$.

2. Dimensi Partisi pada graf $C_{n,m}$

Pengertian dimensi partisi suatu graf diberikan pada definisi berikut:

Definisi 2.1

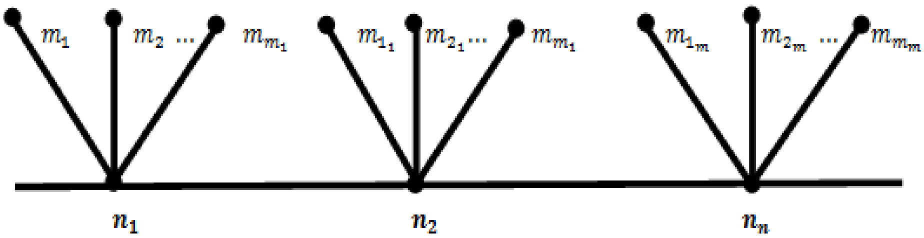
Misalkan G adalah suatu graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, \dots, S_k$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Misalkan terdapat suatu simpul v di G, maka representasi v terhadap Π sebagai jarak dan v ke tiap-tiap partisi di Π, ditulis $r = (v, \pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Untuk selanjutnya $r(v, \pi)$ ini disebut vektor penyajian. Jika setiap simpul yang berbeda di G mempunyai representasi yang bebeda terhadap Π maka Π disebut partisi pembeda. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand, 2000).

Menurut salah satu Lemma dari *Chartrand* yaitu:

$d(u, w) = d(v, w)$ untuk $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka u, v harus pada partisi pembeda (Chartrand, 2000).

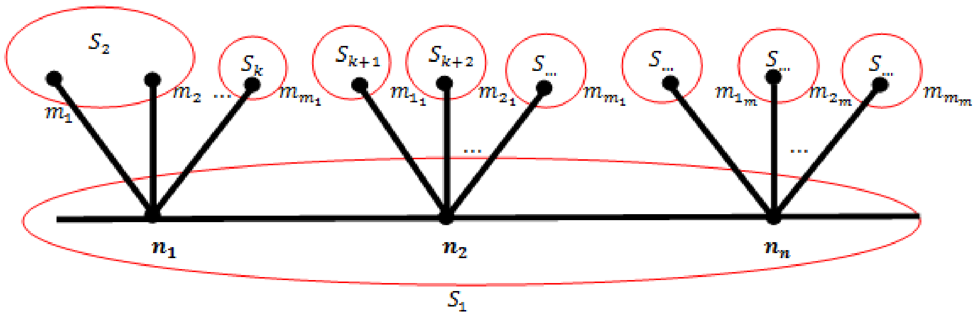
Akibat 1.

Untuk membentuk partisi pembeda dari graf $C_{n,m}$, maka masing-masing simpul pada setiap *dependent* dipartisi. Misal ada graf $C_{n,m}$, akan dipartisi menjadi $S_1, S_2, \dots, S_k$. Maka $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$



Gambar 3. Graf $C_{n,m}$

Dengan pembuktian kondradiksi, yaitu graf $C_{n,m}$ tidak dipartisi pada masing-masing simpul pada setiap *dependent*. Misal dari salah satu *dependent* ada dua simpul dalam 1 partisi



Gambar 4. Graf $C_{n,m}$

Misal diambil dua simpul di S_2, yaitu m_1, m_2

- $r(m_1, S_1) = d(m_1, S_1) = 1$
  $r(m_1, S_2) = d(m_1, S_2) = 0$
  $r(m_1, S_k) = d(m_1, S_k) = 2$
  $\vdots$
  $r(m_1, S_{k+1}) = d(m_1, S_{k+1}) = 3$
  $r(m_1, S_{k+2}) = d(m_1, S_{k+2}) = 3$
  $\vdots$
  $r(m_1, S_{k+m}) = d(m_1, S_{k+m}) = 3$
  $\vdots$
  $r(m_1, S_{...}) = d(m_1, S_{...}) = n + 1$
  $r(m_1, \pi) = (1, 0, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, n + 1)$
- $r(m_2, S_1) = d(m_2, S_2) = 1$
  $r(m_2, S_2) = d(m_2, S_2) = 0$
  $r(m_2, S_k) = d(m_2, S_k) = 2$
  $\vdots$
  $r(m_2, S_{k+1}) = d(m_2, S_{k+1}) = 3$
  $r(m_2, S_{k+2}) = d(m_2, S_{k+2}) = 3$
  $\vdots$
  $r(m_2, S_{k+m}) = d(m_2, S_{k+m}) = 3$
  $\vdots$
  $r(m_2, S_{...}) = d(m_2, S_{...}) = n + 1$
  $r(m_2, S_{...}) = (1, 0, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, n + 1)$

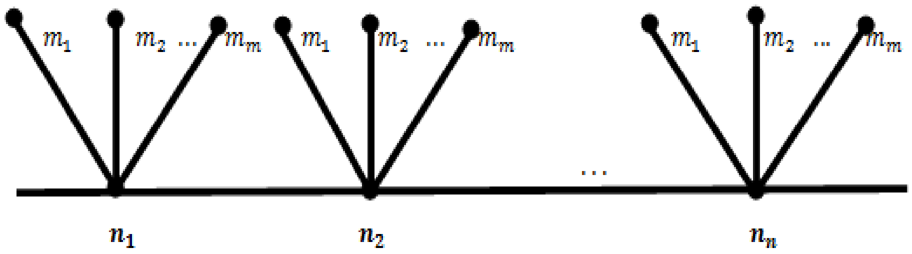
Representasi dari $r(m_1, \Pi)$ dengan $r(m_2, \Pi)$ sama karena dua simpul tersebut dalam satu partisi sehingga tidak membentuk partisi pembeda. Jadi ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa pada graf $C_{n,m}$ dapat dibentuk partisi pembeda jika masing-masing simpul pada setiap dependent dipartisi.

Teorema 2.

Diberikan suatu graf *Caterpillars* $C_{n,m}$ dengan simpul *backbone* n dan simpul d*ependent*nya adalah m maka $pd(C_{n,m}) = (n.m) + 1$.

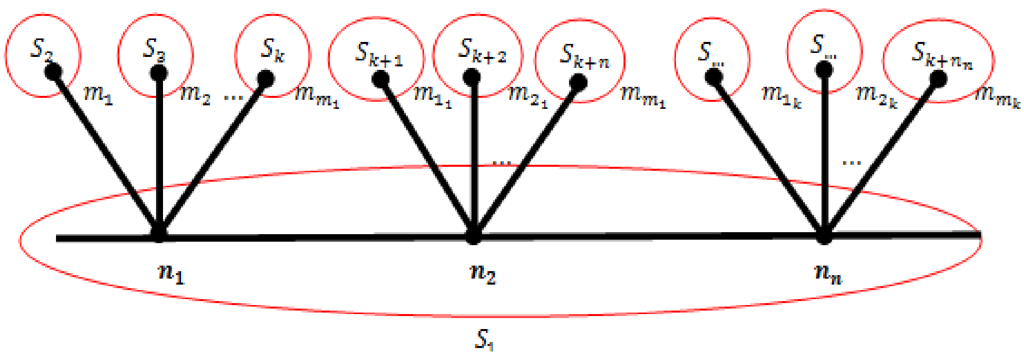
Bukti

Misal $C_{n,m}$ adalah suatu graf *Caterpillars* dan $V(n, m)$ adalah himpunan simpul.



Gambar 5. Graf $C_{n,m}$

Berdasarkan akibat 1 maka graf $C_{n,m}$ dipartisi menjadi beberapa partisi misal $S_1, S_2, \dots, S_k$. Maka $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{k_1}, \dots, S_{k_p}\}$



Gambar 6. Graf $C_{n,m}$

$S_1 = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$
$S_2 = \{m_1\}$
$S_3 = \{m_2\}$
$\vdots$
$S_k = \{m_{m_k}\}$

Jurnal Ilmiah Edukasi Matematika (JIEM)
Vol. 1/No.2/Oktober 2015
ISSN: 977-2442-878-028

Misalkan diambil sebarang simpul pada graf $C_{n,m}$ maka representasi simpul tersebut terhadap Π adalah

- $r(m_1,S_1) = d(m_1,S_1) = 1$
  $r(m_1,S_2) = d(m_1,S_2) = 0$
  $r(m_1,S_3) = d(m_1,S_3) = 2$
  $\vdots$
  $r\left(m_1,S_{k_p}\right) = d(m_1,S_k)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right)$
  $= n+1$
  $r(m_1,\Pi) = (1,0,2,\dots,n+1)$
- $r(m_2,S_1) = d(m_2,S_1) = 1$
  $r(m_2,S_2) = d(m_2,S_2) = 2$
  $r(m_2,S_3) = d(m_2,S_3) = 0$
  $\vdots$
  $r\left(m_2,S_{k_p}\right) = d(m_2,S_k)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right)$
  $= n+1$
  $r(m_1,\Pi) = (1,2,0,\dots,n+1)$
  $\vdots$
  $r(m_1,\Pi) = (1,2,0,\dots,n+1)$
  $\vdots$
- $r\left(m_{m_1},S_1\right) = d\left(m_{m_1},S_1\right) = 1$
  $r\left(m_{m_1},S_2\right) = d\left(m_{m_1},S_2\right) = 2$
  $r\left(m_{m_1},S_{k_1}\right) = d\left(m_{m_1},S_{k_1}\right) = 0$
  $\vdots$
  $r\left(m_{m_1},S_{k_p}\right) = d\left(m_{m_1},S_{k_p}\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right)$
  $= n+1$
  $r\left(m_{m_1},\pi\right) = (1,2,\dots,0,\dots,$
  $n+1)$
  $\vdots$
- $r\left(m_{m_k},S_1\right) = d\left(m_{m_k},S_1\right) = 1$
  $r\left(m_{m_k},S_2\right) = d\left(m_{m_k},S_2\right)$
  $= diam(C_{n.m})$
  $= diam(C_{n.m})$
  $r\left(m_{m_k},S_3\right) = d\left(m_{m_k},S_3\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right)$
  $= n+1$
  $\vdots$
  $r\left(m_{m_k},S_k\right) = d\left(m_{m_k},S_k\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right)$
  $= n+1$
  $r\left(m_{m_k},S_{k+1}\right) = d\left(m_{m_k},S_{k+1}\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right) - 1$
  $= n+1-1 = n$
  $r\left(m_{m_k},S_{k+2}\right) = d\left(m_{m_k},S_{k+2}\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right) - 1$
  $= n+1-1 = n$
  $\vdots$
  $r\left(m_{m_k},S_{k+n}\right) = d\left(m_{m_k},S_{k+n}\right)$
  $= diam\left(C_{n,m}\right) - 1$
  $= n+1-1 = n$
  $\vdots$
  $r\left(m_{m_k},S_{k_p}\right) = d\left(m_{m_k},S_{k_p}\right) = 0$
  $r\left(m_{m_k},\Pi\right) = (1,n+1,n+1,\dots,$
  $n+1,n,n,..n,\dots,0)$

Maka
$r(m_1,\Pi) = (1,0,2,\dots,n+1)$
$r(m_2,\Pi) = (1,2,0,\dots,n+1)$
$\vdots$
$r\left(m_{m_1},\Pi\right) = (1,2,\dots,0,\dots,n+$
$1)$
$\vdots$
$r\left(m_{m_k},\Pi\right) = (1,n+1,n+1,\dots,$
$,n+1,\dots,n,n,\dots,$
$n,n-1,\dots,0)$

Dengan demikian Π adalah partisi pembeda karena simpul-simpul yang berbeda di $C_{n,m}$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π.

Π didefinisikan sebagai himpunan yang berisi k-partisi. Banyak anggota dari Π adalah

$$k = n.m + 1$$

Karena Π adalah partisi pembeda dan graf $C_{n,m}$, maka kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian $= n.m + 1$. Sehingga dimensi partisi dari $C_{n,m} = n.m + 1$. Terbukti Bahwa $pd(C_{n,m}) = n.m + 1$.

D. Kesimpulan dan Saran

1. Kesimpulan

Graf *Caterpillars* $C_{n,m}$, n adalah order dari *path* (banyaknya simpul *backbone* dari graf *Caterpillar*), m adalah order dari cabang (banyaknya simpul *dependent*), maka $diam(C_{n,m}) = n + 1$.

Graf *Caterpillars* $C_{n,m}$ dipartisi menjadi $S_1, S_2, \ldots, S_k$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$. π disebut partisi pembeda jika setiap titik yang berada pada graf $C_{n,m}$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Graf $C_{n,m}$ dapat dibentuk partisi penyelesaian jika setiap simpul pada masing-masing dependent dipartisi sendiri-sendiri. Kardinalitas minimum dari partisi penyelesaian adalah dimensi partisi dari graf $C_{n,m}$. Dimensi partisi $C_{n,m}$ dilambangkan dengan $pd(C_{n,m})$ yang nilainya yaitu

$$pd(C_{n,m}) = n.m + 1$$

2. Saran

Penulisan jurnal ilmiah ini untuk mencari diameter dan dimensi partisi dari Graf *Caterpillars* $C_{n,m}$. Dari diameter dan dimensi partisi Graf *Caterpillasr* yang telah diperoleh dapat dikembangkan dengan mencari apakah ada hubungan antara diameter dan dimensi partisi dari graf tersebut, serta jurnal ilmiah ini dapat dijadikan sebagai tinjauan pustaka untuk tugas akhir atau penelitian lebih lanjut tentang graf.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, Gary ,E. Salehi, and P. Zhang. 2000. *The Partition Dimension of a Graph*. *Aequationes Mathematicae*. 59: 45-54.

Gross, Jonathan L. and Jay Yellen. 2006. *Second Edition*. *Graph Theory and Its Application*. Boca Raton : Taylor and Francis Group.

Riza, Refina. 2012. *Dimensi Partisi Graf Gir*. Jurnal Matematika UNAND. Vol. 1 No. 2: 21-27.

Schmuck, Nina. S, Stephan G. Wagner, Hua Wang. 2012. *Greedy Trees, Caterpillars, and Wiener-type Graph Invariants*. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*. 68: 273-292

Tomescu, Ioan. 2008. *Discrepancies between metric dimension and partition dimension of a connected graph. Science Direct. Discrete Mathematics.* 308: 5026-5031.