

PENGGUNAAN ALJABAR MAX PLUS DAN PETRI NET UNTUK PENJADWALAN SISTEM PELAYANAN PERBAIKAN INSTALASI DI PDAM

Margaretha Dwi Cahyani

Program Studi Pendidikan Matematika - FKIP
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

The purpose of this study will try to build Petri Net's flows of scheduling installation repair service system at PDAM. Furthermore, from Petri Net's flows that has been made, it will be built coverability tree to analyze liveness and deadlocks, then create Max Plus Algebra model. Next process is analyze and simulating Max Plus Algebra model that has been made. The analyze result of Petri Net's flows of scheduling installation repair service system that has been created is the Petri Net never get deadlocks and always liveness, also the simulation and analyze from Max Plus algebra model deliver that for one time repairing service system start from registration till repair the installation completed need 940 minutes or 1 day 7 hours 40 minutes

Key Words : *Coverability Tree, Deadlocks, Liveness, Max Plus Algebra, Petri Net*

A. Pendahuluan

1. Latar Belakang

Air adalah kebutuhan utama setiap orang baik untuk kebutuhan di dalam rumah tangga maupun untuk kebutuhan yang berada di luar urusan rumah tangga, seperti kebutuhan akan air di sekolah, di rumah sakit, dan untuk sarana umum lainnya. Pertumbuhan penduduk pada akhir-akhir ini sangat pesat dan tingkat pencemaran air pun juga semakin meningkat, sehingga semakin hari kebutuhan akan air bersih meningkat, masyarakat semakin banyak menggunakan air dari PDAM terlebih masyarakat kota. Masyarakat yang menggunakan layanan PDAM atau disebut juga sebagai pelanggan mungkin beberapa kali mengalami masalah kerusakan instalasi PDAM, baik kerusakan itu karena kesalahan pelanggan maupun karena bukan kesalahan pelanggan.

Mayoritas masyarakat (pelanggan) yang menggunakan layanan PDAM tidak mengetahui dengan jelas alur dari proses pelayanan jika terjadi kerusakan pada instalasi, sehingga hanya menebak lamanya waktu pelayanan dari awal pendaftaran hingga selesainya pelayanan. Petugas di kantor PDAM juga tidak bisa memberikan kepastian kepada pelanggan tentang lamanya proses pelayanan untuk perbaikan instalasi. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka digunakan sebagai gambaran untuk penelitian tentang penggunaan *Petri Net* dan Aljabar *Max Plus* untuk penjadwalan sistem pelayanan perbaikan instalasi di PDAM.

2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah:

- Bagaimana membangun alur *Petri Net* untuk sistem penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi agar tidak terjadi *deadlocks* dan tetap *liveness*?
- Bagaimana membangun model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat?

3. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

- Diperoleh alur *Petri Net* untuk sistem penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi yang tidak *deadlocks* dan tetap *liveness*.
- Diperoleh model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat.

4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

- Pengaturan sistem penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi dapat dimaksimalkan sehingga dapat meningkatkan kinerja karyawan
- Analisis pemodelan dan penjadwalan yang digunakan dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut, sehingga pada penelitian berikutnya dapat lebih memberi manfaat bagi pihak yang membutuhkan.

B. Tinjauan Pustaka

1. Kajian Teori

a. *Petri Net*

Cassandras dan Lafortune (2008) mendefinisikan *Petri net* adalah 4-tuple (P, T, A, w) dengan

- P : himpunan berhingga *place*, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,
 T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,
 A : himpunan *arc*, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
 w : fungsi bobot, $w : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$.

Keterangan mengenai variabel yang digunakan dalam *Petri Net*. $P_i, i = 0, 1, 2, \dots$ merupakan variabel *place* atau sebuah keadaan di mana pelanggan berada, sedangkan $T_j, j = 0, 1, 2, \dots$ merupakan variabel transisi atau sebuah keadaan di mana sedang terjadi sesuatu pada pelanggan (proses).

Variabel *place* P_i digambarkan berupa lingkaran sedangkan variabel transisi T_j digambarkan dengan persegi panjang berwarna hitam. Peletakan token pada sebuah *place* merupakan tempat di mana pelanggan akan memulai proses pelayanan. Bobot *arc* dari *place* input ke transisi menunjukkan jumlah token minimum di *place* agar transisi *enabled*. Jika semua *place* input mempunyai token lebih dari atau sama dengan jumlah token minimum yang dibutuhkan maka transisi *enabled*. Transisi yang *enabled* adalah berwarna merah. *Petri Net* dikatakan *enabled* berdasarkan definisi dari (Cassandras and Lafortune, 2008) adalah fungsi perubahan keadaan pada *Petri Net* bertanda (P, T, A, w, x_0) yaitu $f = \{0, 1, 2, \dots\}^n \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}^n$ terdefinisi untuk transisi $t_j \in T$ jika dan hanya jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j). \quad (1)$$

Selanjutnya untuk mengetahui *Petri Net liveness* atau *deadlocks* yaitu dengan menggunakan *Coverability Tree*. Sebuah keadaan dikatakan *deadlocks* ketika transisi tertentu atau himpunan transisi tertentu pada *Petri Net* tidak dapat difire sama sekali. *Deadlocks* dapat disebabkan karena persaingan mendapatkan token. Ketika semua *place* tidak mendapatkan token maka transisi tidak ada yang dapat difire sehingga terjadi *deadlocks*. Transisi yang tidak berhubungan dengan *deadlocks* disebut *liveness* yang diartikan sebagai transisi yang mungkin *enable*. Idealnya setiap transisi pada *petri net* dapat difire. Hal ini menjamin *deadlocks* tidak terjadi.

Setiap *node* pada *Coverability tree* menyatakan keadaan dari *Petri net*. Keadaan awal *Petri Net* didefinisikan sebagai *node root*. Anak dari *node root* merupakan keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal dengan memfire sebuah transisi (jika hanya terdapat satu transisi *enable*) atau memfire salah satu transisi (jika terdapat beberapa transisi yang *enable*). Keadaan-keadaan ini dihubungkan ke *node root* dengan *edge*. Setiap *edge* pada *Coverability tree* mempunyai bobot sebuah transisi yaitu transisi yang *enable* dan siap untuk difire untuk mencapai keadaan tersebut.

Sebuah alur *Petri Net* dikatakan *liveness* atau tidak *deadlocks* ketika *Coverability tree* membentuk *looping*. *Coverability tree* yang membentuk *looping* disebabkan dari pemfirean transisi pada alur *Petri Net* yang tidak pernah berhenti (Widayanti, 2013).

b. Aljabar Max Plus

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$. Pada \mathbb{R}_ε didefinisikan operasi berikut (Subiono, 2013): $\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$,

$$x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} x + y \quad (2)$$

2. Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya tentang Aljabar *Max Plus* dan *Petri Net* adalah: penelitian oleh Adzkiya (2008) tentang membangun model *Petri Net* lampu lalu lintas dan simulasinya. Adzkiya (2008) menggunakan *Petri Net* untuk menentukan penjadwalan nyala lampu lalu lintas dengan tujuan memberikan kepastian waktu tunggu pengguna dan mengurangi waktu tunggu di persimpangan. Talehala (2010) menggunakan Aljabar *Max Plus* untuk membuat desain penjadwalan kegiatan pembelajaran sekolah pada kelas *moving* dan hasil yang didapatkan adalah optimalisasi jumlah tenaga pengajar dan ruang belajar serta dapat menempatkan rombongan belajar ke kelas yang tepat. Suyanto (2011) menggunakan Aljabar *Max Plus* untuk membuat desain penjadwalan kegiatan belajar mengajar di Sekolah Menengah Atas Katolik (SMAK) St. Louis I, Surabaya yang mengacu pada pembagian yang merata dalam hal bobot kesulitan materi pelajaran. Penelitian lainnya yaitu oleh Widayanti (2013) tentang perancangan penjadwalan sistem pelayanan dan kerja karyawan pemasangan instalasi di PLN menggunakan Aljabar *Max Plus* dan *Petri Net*. Dari beberapa penelitian tersebut dapat menambah gambaran tentang aplikasi penjadwalan dengan menggunakan Aljabar *Max Plus* dan *Petri Net*.

C. Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Mempelajari Teori Aljabar *Max Plus* dan *Petri Net*

Pada tahap ini diawali dengan mempelajari teori-teori Aljabar *Max Plus*, *Petri Net* serta mempelajari penelitian-penelitian sebelumnya.

2. Pengumpulan data

Pada tahap ini dilakukan pengambilan data di kantor PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk, yaitu alur atau urutan pelanggan dari permintaan perbaikan instalasi PDAM, mulai dari pendaftaran sampai selesai proses pelayanan.

3. Penyusunan Alur *Petri Net*

Menyusun alur *Petri Net* dari data yang telah dikumpulkan yaitu alur pelayanan perbaikan instalasi PDAM. *Place* menunjukkan keadaan tentang keberadaan pelanggan sedangkan *transisi* menunjukkan keadaan sedang berlangsungnya sebuah proses.

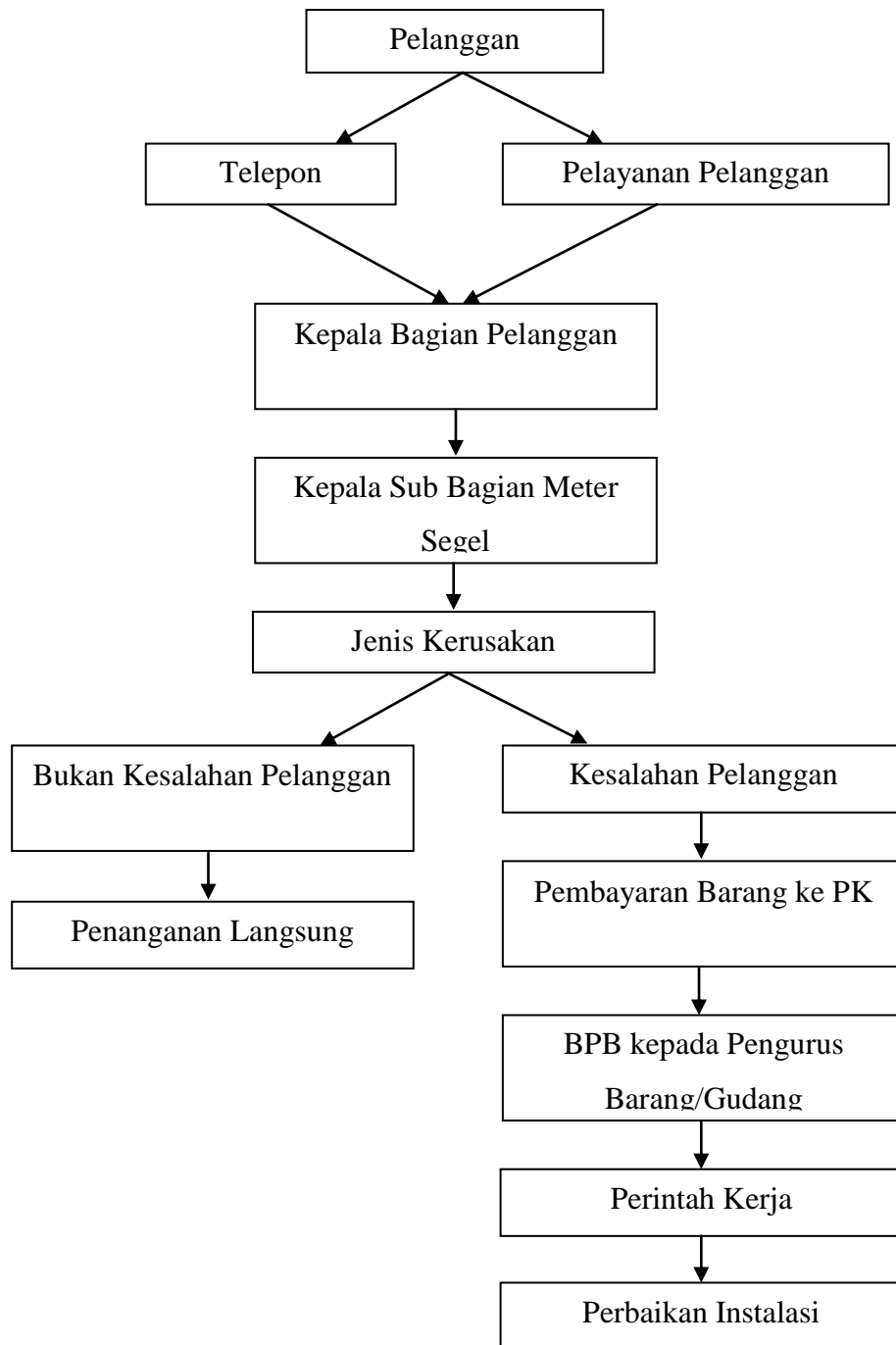
4. Menganalisis *liveness* dan *deadlocks* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat.

5. Membuat model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net*.

6. Analisis hasil simulasi model Aljabar *Max Plus*.

D. Hasil dan Pembahasan

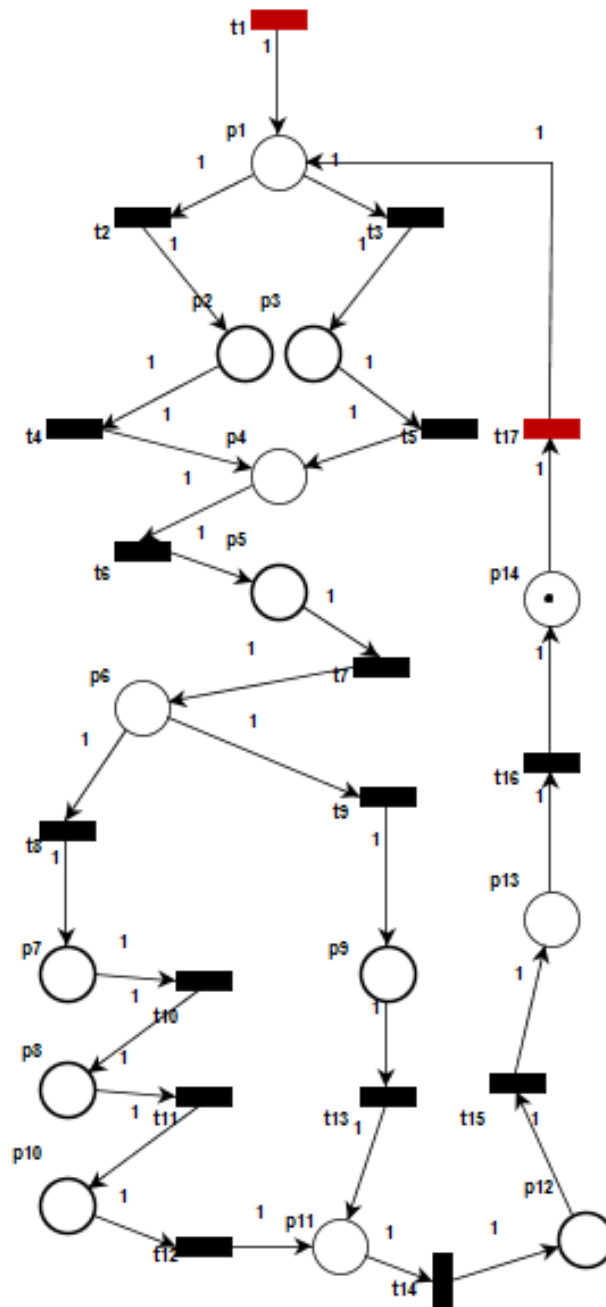
Alur proses pelayanan perbaikan instalasi di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk (File PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk (2013) adalah:



Gambar 1. Alur Pelayanan Perbaikan Instlasi

1. *Petri Net* Pelayanan Perbaikan Instalasi

Berikut adalah gambar *Petri Net* dari pelayanan perbaikan instalasi di kantor PDAM berdasarkan gambar 1:



Gambar 2. Petri Net Alur Pasang Baru

Keterangan gambar 2 untuk *Petri Net* Perbaikan Instalasi:

t_1 = proses pelanggan masuk ke antrian

t_2 = proses pelanggan memberikan aduan lewat telepon

t_3 = proses pelanggan memberikan aduan dengan datang langsung ke bagian Pelayanan Pelanggan

- t_4 = proses berkas aduan dari pelanggan telepon diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan
- t_5 = proses berkas aduan dari pelanggan yang datang langsung diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan
- t_6 = proses Kepala Bagian Pelanggan menulis laporan kerusakan kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel.
- t_7 = proses survey kerusakan
- t_8 = proses keputusan hasil survey karena kesalahan pelanggan
- t_9 = proses keputusan hasil survey karena bukan kesalahan pelanggan
- t_{10} = proses pembayaran ke bagian Pelaksana Keuangan/Kasir
- t_{11} = proses BPB (Bon Permintaan Barang) diserahkan ke Bagian Pengurus Gudang
- t_{12} = proses mempersiapkan barang dan alat-alat untuk perbaikan instalasi dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan
- t_{13} = proses pengecekan barang dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan
- t_{14} = proses petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan
- t_{15} = proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan
- t_{16} = proses selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM
- t_{17} = pelanggan keluar dari antrian
- p_1 = pelanggan yang mengantri
- p_2 = pelanggan yang menelepon
- p_3 = pelanggan yang datang langsung ke bagian Pelayanan Pelanggan
- p_4 = Kepala Bagian Pelanggan
- p_5 = Kepala Sub Bagian Meter Segel
- p_6 = hasil survey
- p_7 = jenis kerusakan karena kesalahan pelanggan
- p_8 = bagian pelaksana keuangan
- p_9 = jenis kerusakan karena bukan kesalahan pelanggan
- p_{10} = Bagian Pengurus Gudang/Barang
- p_{11} = Surat Perintah kepada petugas pelayanan lapangan
- p_{12} = Antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan
- p_{13} = pelayanan lapangan oleh tim
- p_{14} = tim selesai mengerjakan permintaan pelanggan dan pelanggan keluar dari antrian (*idle*)

2. Coverability Tree Petri Net Pelayanan Perbaikan Instalasi

Setelah melakukan pemfirean pada Petri Net Penjadwalan Perbaikan Instalasi, dihasilkan bahwa *Coverability Tree* dari *Petri Net* tersebut membentuk *looping* saat proses pemfirean yaitu proses pemfirean tidak pernah berhenti, sehingga *Petri Net* tersebut adalah *liveness*.

3. Model Aljabar Max Plus

Alur *Petri Net* dari proses pelayanan perbaikan instalasi setelah disimulasikan hasilnya adalah *liveness*, sehingga bisa dibuat model Aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* tersebut. Model Aljabar *Max Plus*nya setelah disimulasikan adalah:

a. Proses perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_1,k} & a \\ b & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_1(k-1) \\ t_{17}(k-1) \end{bmatrix}$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus a \otimes t_{17}(k-1) = v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1)$$

Nilai b didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} b = & v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\ & \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \\ & \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_1,k} \end{aligned}$$

Nilai c didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} c = & v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\ & \otimes v_{t_2,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \\ & \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \end{aligned}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$$V_{t_1,1} = 5$$

$$V_{t_2,1} = 10$$

$$V_{t_3,1} = 10$$

$$V_{t_4,1} = 5$$

$$V_{t_5,1} = 5$$

$$V_{t_6,1} = 10$$

$$V_{t_7,1} = 8 \times 60 = 480$$

$$V_{t_9,1} = 5$$

$$v_{t_{13},1} = 30$$

$$v_{t_{14},1} = 15$$

$$v_{t_{15},1} = 280$$

$$v_{t_{16},1} = 100$$

$$v_{t_{17},1} = 5$$

$$\begin{aligned} b = & v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\ & \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \\ & \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_1,k} \\ = & 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 \oplus 5 \\ & \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 \\ = & 945 \text{ menit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
 &\quad \otimes v_{t_2,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \\
 &\quad \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \\
 &= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \oplus 5 \otimes \\
 &\quad 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 = 940 \text{ menit}
 \end{aligned}$$

Untuk keadaan awal $\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Didapatkan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ 945 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 945 \end{bmatrix}$$

Proses pelayanan perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan mulai dari pengaduan sampai dengan pelayanan selesai membutuhkan waktu $t_{17}(1) - t_1(1) = 945 - 5 = 940$ menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit.

b. Proses perbaikan instalasi karena kesalahan pelanggan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_1,k} & a \\ d & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_1(k-1) \\ t_{17}(k-1) \end{bmatrix}$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus a \otimes t_{17}(k-1) = v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1)$$

Nilai d didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}
 d &= v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
 &\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \\
 &\quad \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_1,k}
 \end{aligned}$$

Nilai e didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}
 e &= v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
 &\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_2,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \\
 &\quad \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$$v_{t_{1,1}} = 5$$

$$v_{t_{2,1}} = 10$$

$$v_{t_{3,1}} = 10$$

$$v_{t_{4,1}} = 5$$

$$v_{t_{5,1}} = 5$$

$$v_{t_{6,1}} = 10$$

$$v_{t_{7,1}} = 8 \times 60 = 480$$

$$v_{t_{8,1}} = 5$$

$$v_{t_{10,1}} = 10$$

$$v_{t_{11,1}} = 10$$

$$v_{t_{12,1}} = 10$$

$$v_{t_{14,1}} = 15$$

$$v_{t_{15,1}} = 280$$

$$v_{t_{16,1}} = 100$$

$$v_{t_{17,1}} = 5$$

$$\begin{aligned}
 d &= v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
 &\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \oplus v_{t_{17},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{12},k} \\
 &\quad \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_1,k} \\
 &= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \\
 &\quad \otimes 5 \oplus 5 \otimes 100 \otimes 180 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \\
 &\quad \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 = 945 \text{ menit}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 o &= v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes \\
 &\quad v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes \\
 &\quad v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
 &= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 1440 \otimes 10 \otimes 5 \otimes \\
 &\quad 10 \oplus 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 1440 \otimes 10 \\
 &\quad \otimes 5 \otimes 10 = 940 \text{ menit}
 \end{aligned}$$

Untuk keadaan awal $\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Didapatkan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ 945 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 945 \end{bmatrix}$$

Proses pelayanan perbaikan instalasi karena kesalahan pelanggan mulai dari pengaduan sampai dengan pelayanan selesai membutuhkan waktu $t_{48}(1) - t_{17}(1) = 945 - 5 = 940$ menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit.

E. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian, dan simulasi serta pembahasan dari penelitian ini, maka disimpulkan bahwa: diperoleh alur *Petri Net* untuk penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi yang tidak pernah *deadlocks* dan tetap *liveness*, serta diperoleh model Aljabar *Max Plus* untuk penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi yaitu :

1. Proses perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_1,k} & \infty \\ 945 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_1(k-1) \\ t_{17}(k-1) \end{bmatrix}$$

2. Proses perbaikan instalasi karena kesalahan pelanggan

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_{17}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_1,k} & \infty \\ 945 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_1(k-1) \\ t_{17}(k-1) \end{bmatrix}$$

Dengan alur *Petri Net* dan model Aljabar *Max Plus* tersebut maka dapat dengan mudah dibuat penjadwalan untuk pelayanan perbaikan instalasi di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk, sehingga penelitian ini juga dapat dikembangkan ke penelitian lain seperti penjadwalan pelayanan di kantor PDAM lain karena setiap kantor PDAM memiliki prosedur pelayanan yang berbeda, penjadwalan pelayanan di kantor instansi lain, atau pada sistem penjadwalan lainnya.

Daftar Pustaka

- Adzkiya, D. 2008. *Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*, Tesis. Program Magister Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Cassandras, C.G. dan Lafortune, S. 2008. *Introduction to Discrete Event Systems. Second Edition*. New York: Springer Science+Business Media.
- PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. 2013. *Prosedur Kegiatan Baku*. Nganjuk: PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk
- Subiono. 2013. *Aljabar Maxplus dan Terapannya. Version 1.1.1*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Suyanto, Y.H. 2011. *Penjadwalan Kegiatan Belajar Mengajar di Sekolah Menengah Atas Katolik (SMAK) St. Louis I Surabaya*. Tesis. Program Magister Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Talehala, M.M. 2010. *Model Penjadwalan Kegiatan Pembelajaran Sekolah pada Kelas Moving dengan Menggunakan Aljabar Max Plus*. Tesis. Program Magister Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Widayanti, D.N. 2013. *Perancangan Penjadwalan Sistem Pelayanan dan Kerja Karyawan Pemasangan Instalasi di PLN menggunakan Aljabar MaxPlus dan Petri Net*. Tesis. Program Magister Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.